

INSTITUTO FEDERAL  
RIO DE JANEIRO



CONCURSO PÚBLICO  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO

EDITAL Nº 006/2022

PADRÃO DE RESPOSTAS DA PROVA DISCURSIVA REALIZADA DOMINGO, 15 DE MAIO DE 2022.  
PRAZO PARA RECURSO CONTRA O PADRÃO DE RESPOSTAS: 16 E 17 DE MAIO DE 2022, NO ENDEREÇO ELETRÔNICO:  
<http://www.selecon.org.br>

PADRÃO DE RESPOSTAS PRELIMINAR

DUC – 01

MATEMÁTICA  
Matemática; Estatística

Nº DA QUESTÃO	Espera-se que o candidato(a) desenvolva os aspectos/conteúdos propostos a seguir.
1	<p>a) Em um dado, não viciado, todas as faces possuem a mesma probabilidade de ficarem voltadas para cima. Como duas faces tem o mesmo número, a probabilidade de se obter esse número é o dobro das demais, deste modo os resultados não são equiprováveis entre si.</p> <hr/> <p><b>Critério de pontuação do item</b></p> <p>i. Calcular corretamente o que se pede <b>(2,0 Pontos)</b> Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): <b>12 linhas</b></p> <hr/> <p>b) Katie tira no <b>primeiro lançamento</b> um número diferente de 1. Deste modo, são 5 os resultados possíveis para este lançamento: 2, 3, 4, 5 e 6. No entanto, se o resultado for 6 não haverá chance de êxito para Katie no segundo lançamento. Então, para que ela consiga ter êxito no segundo lançamento, são 4 casos favoráveis dentre os 5 possíveis para o primeiro lançamento. <math>P_1 = 4/5</math></p>

Tendo garantido que o número seis é um dos resultados do segundo lançamento (caso favorável) dentre os seis possíveis, temos que a probabilidade de Katie acertar o segundo lançamento, independentemente do primeiro, é:

$$P_2 = 1/6$$

A probabilidade desejada é dada por:  $4/5 \times 1/6 = 4/30 = 2/15$

---

**Critério de pontuação do item**

- i. Cálculo de  $P_1$  (0,8 Pontos)
- ii. Cálculo de  $P_2$  (0,8 Pontos)
- iii. Cálculo de Final (0,4 Pontos)

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

---

- c) O mais favorável ao jogador será aquele em que a banca tem a menor chance de vencer. Então, basta calcular a probabilidade de errar os dois lançamentos em cada caso.

**OBJETIVO 2 E 5**

São cinco casos favoráveis à banca dentre os seis possíveis no primeiro lançamento. Os resultados 1, 3, 4 e 6 não alteram a chance de sair 5 no segundo lançamento, mas o resultado 5 no primeiro lançamento anula a possibilidade de acerto no segundo.

Então, desmembramos os casos favoráveis à banca no primeiro lançamento.

1º caso)  $1/6$  (para 5) → Neste a banca já ganhou!

2º caso)  $4/6$  (para 1, 3, 4 e 6). Para ganhar aqui é necessário que não saia 5 no segundo lançamento, deste modo, há 5 casos favoráveis à banca (todos com exceção do 5). Daí, temos  $4/6 \times 5/6 = 20/36$

A banca ganha nos dois casos, ou um ou outro. Então, a chance de a banca ganhar é  $1/6 + 20/36 = 26/36$ .

**OBJETIVO 2 E 3**

São cinco casos favoráveis à banca dentre os seis possíveis no primeiro lançamento. Os resultados 1, 5 e 6 não alteram a chance de sair 3 no segundo lançamento, mas os resultados 3 e 4 alteram. Vamos desmembrar o primeiro lançamento em três casos.

1º caso)  $3/6$  (para 1, 5 e 6). Com qualquer desses resultados a probabilidade de não sair 3 no segundo lançamento é  $5/6$ .  $P_1 = 3/6 \times 5/6 = 15/36$

2º caso)  $1/6$  (para 3). Neste caso a banca já ganhou!  $P_2 = 1/6$

3º caso)  $1/6$  (para 4). Neste caso, haverá duas faces com o número 3 no segundo lançamento. Daí, há 4 casos favoráveis à banca.  $4/6$   
 $P_3 = 1/6 \times 4/6 = 4/36$

$$15/36 + 1/6 + 4/36 = 25/36$$

Como a chance da banca é inversa a de Paul, a melhor chance de ele ganhar ou de recuperar o dinheiro gasto ocorreu no objetivo 2 e 3, com uma probabilidade de  $11/36$ . Essa é a probabilidade de Paul acertar pelo menos um resultado.

---

**Critério de pontuação do item**

i. Solução que apresenta o caminho correto **(1,5 Pontos)**

ii. Desenvolvimento correto até o fim **(1,5 Pontos)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **20 linhas**

---

d) As probabilidades envolvidas no objetivo 4 e 5 são idênticas àquelas do objetivo 2 e 3, pois são formados por faces não opostas.

A probabilidade de o apostador acertar os dois lançamentos é  $1/36$ .

De acertar pelo menos um é de  $11/36$  (calculado no item anterior). Então a probabilidade de acertar somente um é  $10/36$  ( $11/36 - 1/36$ ).

Então para cada 36 casos, em média, a banca estima ter 1 vencedor (dois acertos) e 10 apostadores com um acerto.

De cada 360 mil dólares apostados, a banca espera pagar 6 dólares a 10 mil jogadores e devolver a quantia de 1 dólar a 100 mil jogadores.

Então, estima-se pagar 160 mil dólares de premiação, lucrando 200 mil dólares.

---

**Critério de pontuação do item**

i. Solução que apresenta o caminho correto **(1,5 Pontos)**

ii. Desenvolvimento correto até o fim **(1,5 Pontos)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **20 linhas**

---

a) Sabe-se que  $\cos 3x$  é limitada, logo:

2

$$-M \leq \cos 3x \leq M$$

multiplicando a desigualdade acima por  $e^{-3x}$  tem-se:

$$-Me^{-3x} \leq e^{-3x} \cos 3x \leq Me^{-3x}$$

tomando o  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  em todos os membros da desigualdade acima obtêm-se:

$$-M \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \cos 3x \leq M \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \Rightarrow$$

$$-M \cdot 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \cos 3x \leq M \cdot 0$$

onde pelo teorema do confronto (sanduíche) temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \cos 3x = 0$$

---

#### **Critério de pontuação do item**

- i. Mostrar conhecimento a respeito da função cosseno **(1 ponto)**
- ii. Manipular corretamente a desigualdade **(1 ponto)**
- iii. Utilizar o teorema do confronto para calcular o limite **(1 ponto)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

---

**b)** Os pontos críticos da função são os valores de  $x$  que satisfazem:

$$f'(x) = 0$$

assim, calculando  $f'(x)$  tem-se:

$$f'(x) = -3e^{-3x} (\cos 3x + \sin 3x)$$

Dessa forma

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 3x + \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin 3x, \text{ como } x \in [-1, 0]$$

temos  $x = -\frac{\pi}{12}$ .

como  $f(-1) \leq f(-\frac{\pi}{12})$  e  $f(-\frac{\pi}{12}) \geq f(0)$ ,  $x = -\frac{\pi}{12}$  é onde ocorre o máximo de  $f$

**Critério de pontuação do item**

- i. Apontar o critério para pontos críticos **(1 ponto)**
- ii. Calcular corretamente a derivada **(1 ponto)**
- iii. Calcular corretamente a abcissa utilizando a derivada primeira **(1 ponto)**
- iv. Verificar que o valor encontrado é realmente o máximo da função **(1 ponto)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

c) Utilizando a integração fazendo:

$$\begin{aligned}u &= e^{-3x} \\u' &= -3e^{-3x} \\v' &= \cos 3x \\v &= 1/3 \sin 3x\end{aligned}$$

escreve-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin 3x + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \sin 3x \, dx}_M$$

usando novamente a integração por partes:

$$\begin{aligned}u &= e^{-3x} \\u' &= -3e^{-3x} \\v' &= \sin 3x \\v &= -1/3 \cos 3x\end{aligned}$$

escreve-se:

$$M = \frac{1}{3} e^{-3x} \cos 3x - \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx$$

Onde a substituição  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx$  leva a:

$$I = \frac{1}{6} e^{-3x} (\sin 3x - \cos 3x)$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo temos:

$$\frac{1}{6} e^{-3x} (\sin 3x - \cos 3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6} (e^{-\frac{\pi}{2}} + 1) \text{ u.a.}$$

---

**Critério de pontuação**

- i. Toda técnica de integração por partes sem erro **(2 pontos)**
- ii. Aplicação correta do teorema fundamental do cálculo para encontrar a área **(1 ponto)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

---

**3**

a) O candidato deverá mostrar que o triângulo é acutângulo através da relação  $a^2 < b^2 + c^2$ , onde a é o maior lado do triângulo de lados a, b e c.

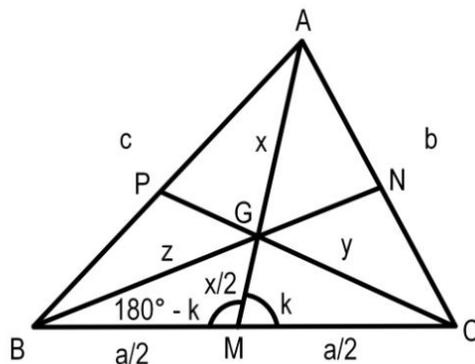
$$8^2 < 5^2 + 7^2$$

$$64 < 25 + 49$$

$$64 < 74$$

O triângulo é acutângulo.

b) O candidato deve desenvolver a demonstração segundo os seguintes passos a seguir.



Como G é o baricentro, temos que M, N e P são pontos médios dos lados do triângulo. Se considerarmos o ângulo ABM com medida igual a K, então a medida de AMC deve ser  $180^\circ - k$ .

O baricentro divide a mediana na razão 2: 1, por esse motivo as medidas de GM, GN e GP devem ser, respectivamente, iguais a  $x/2$ ,  $y/2$  e  $z/2$ .

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABM e BMC, obtemos as seguintes igualdades

$$i) c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \cos k$$

e

$$ii) b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \cos(180^\circ - k)$$

Dado que  $\cos(180^\circ - k) = -\cos k$ , ao somarmos i) e ii) encontramos  $iii) b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{9x^2}{2}$ . De modo análogo, obtemos também as igualdades

$$iv) a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{9y^2}{2} \text{ e } v) a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{9z^2}{2}$$

Somando as expressões iii), iv) e v) chegamos à expressão

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{9x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} + \frac{9z^2}{2}, \text{ onde concluímos que}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

**(4, 0 pontos)**

c) O candidato deve desenvolver a demonstração segundo os seguintes passos a seguir.

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita no triângulo ABC. As distâncias de T aos pontos A, B e C são congruentes, haja vista que são os raios dessa circunferência. O ângulo  $\widehat{BAC}$  mede  $30^\circ$ , pois a soma dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem  $150^\circ$ , segundo o enunciado.

Com isso o ângulo BTC tem medida igual a  $60^\circ$ , pois é ângulo central nessa circunferência. Concluímos, assim que o triângulo BTC é equilátero de lado igual a 10 cm. Logo, sua área S será calculada através de

$$S = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

